Εισαγωγή στη Μαθηματική Φυσική, Ασκήσεις 1ου και 2ου Κεφαλαίου

Διδάσκων: Μιχάλης Ξένος,
email : *mxenos@cc.uoi.gr*

22 Δεκεμβρίου 2015

1. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{e}_1, \hat{e}_2, ..., \hat{e}_N$. Από αυτά κατασκευάζουμε τα διανύσματα $\mathbf{f}_i = \sum\limits_{k=i}^{N} \hat{e}_k$. Να υπολογιστούν τα εσωτερικά γινόμενα $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$, $i, j = 1, 2, ..., N$. Είναι τα διανύσματα $\mathbf{f}_i$ ορθογώνια;

2. Δίνονται τα ορθοκανονικά διανύσματα $|e_1>$ και $|e_2>$.
Αν $|f_1> = -\frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\delta} |e_1> + \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2>$ και $|f_2> = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1> - \frac{i}{\sqrt{2}} e^{-i\delta} |e_2>$, με δ πραγματικό αριθμό, είναι τα $|f_1>$ και $|f_2>$ ορθοκανονικά;

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$s_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(mx),\ c_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ c_m(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(mx),\ m = 1, 2, ...$$

Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο αυτών ανά δύο, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $< g|f > \equiv \int_a^b g^*(x) f(x) dx$, με $a = -b = -\pi$.

4. Δίνονται τα διανύσματα:

$$|f_1> = \xi |e_1> + |e_2>,\ |f_2> = |e_1> + \xi |e_2> + |e_3>, |f_3> = |e_2> + \xi |e_3>,$$

όπου $|e_1>$, $|e_2>$, $|e_3>$ ορθοκανονικά και ξ πραγματικός αριθμός. Για ποιες τιμές του ξ τα $|f_1>$, $|f_2>$, $|f_3>$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα; Για ποιες τιμές του ξ είναι γραμμικά εξαρτημένα;

5. Το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως: $< g|f > \equiv \int_a^b w(x) g^*(x) f(x) dx$, $w(x) > 0$ και $x \in [a, b]$. Να κατασκευαστούν τα τέσσερα πρώτα ορθογώνια

πολυώνυμα στις εξής περιπτώσεις:
(i) $a=-\infty$, $b=+\infty$, $w(x)=e^{-x^2}$, Hermite.
(ii) $a=0$, $b=+\infty$, $w(x)=x^{\nu}e^{-x}$, $\nu>-1$, Laguerre.
(iii) $a=-1$, $b=1$, $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$, Chebyshev I.

6. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ -1, & -1<x<0 \end{cases}$$

Έστω ότι γράφουμε $f(x)\equiv\sum\limits_{i=1}^{4}\alpha_i P_i(x)$, όπου $P_i(x)$ είναι τα πολυώνυμα Legendre. Να υπολογιστούν οι συντελεστές α_i.

7. Έστω μια συνάρτηση $f(x)$, η οποία αναπαρίσταται, ακριβώς, ως:

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} f_m e_m(x),\ f_m=\int_a^b e_m^*(x)f(x)w(x)dx,$$

όπου τα $e_m(x)$, $m=1,2,3,...$, αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα στο διάστημα $[a,b]$, με συνάρτηση βάρους $w(x)$. Να βρεθούν οι συντελεστές c_m που δίνουν την καλύτερη αναπαράσταση της $f(x)$ με N όρους, δηλαδή

$$f(x)\approx\sum_{m=1}^{N} c_m e_m(x).$$

Σημείωση: Με τον όρο "καλύτερη αναπαράσταση", εννούμε ότι:
$\rho(|f>,\sum\limits_{m=1}^{\infty} c_m|e_m>)=$ ελάχιστο, δηλαδή το τετραγωνικό σφάλμα γίνεται ελάχιστο.

8. Να εξεταστεί κατά πόσον οι συναρτήσεις $\sin(mx)$, $m=1,2,...$, είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0,\pi]$, με $w(x)=1$. Στη συνέχεια, να υπολογιστούν οι συντελεστές c_m, τέτοιοι ώστε:

$$\cos x=\sum_{m=0}^{\infty} c_m\sin(mx),\ 0<x<\pi.$$

Υποθέστε ότι η πιο πάνω σχέση έχει νόημα.

9. Δίνεται η σειρά $\sum\limits_{m=1}^{\infty} f_m(z)$, $f_m(z)=z^2/(1+z^2)^m$. Να δειχτεί ότι η σειρά συγκλίνει. Είναι η σύγκλιση ομαλή; Να γίνει το ίδιο αν $f_m=z/\{[(m-1)z+$

$1](mz+1)\}$.

10. Να δειχτεί ότι η ισχυρή (μέση) σύγκλιση συνεπάγεται την ασθενή.
Υπόδειξη: $|<g|(|f_n>-|f>)| \leq \sqrt{<g|g>}\rho(|f>,|f_n>) \rightarrow 0$, όταν $n \rightarrow \infty$.

11. Να αναλυθεί κατά Fourier η συνάρτηση:

$$f(x) = |x|, \; -\pi < x < \pi.$$

Παρουσιάζεται το φαινόμενο Gibbs; Να δοθεί εξήγηση.

12. Να αναλυθούν κατά Fourier οι εξής συναρτήσεις:

$$(i) \; f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < \omega t < 0 \\ V\,\sin(\omega t), & 0 < \omega t < \pi, \quad V = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\alpha \end{cases}$$

$$(ii) \; f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < V \\ -t, & -V < t < 0 \end{cases}$$

Να εξεταστεί το είδος σύγκλισης (σημείο προς σημείο, ομαλή κλπ.).

Οι ασκήσεις μπορούν να επιστραφούν και μέσω email ($mxenos@cc.uoi.gr$) μέχρι την 20η Δεκεμβρίου 2015.

Βιβλιογραφία:

Μαθηματικές Μέθοδοι Φυσικής, Τόμος Ι, Βέργαδος Ι., Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1η έκδοση, 2009.